



TITLE:

Twisted Linear Actions について(多様体の幾何学)

AUTHOR(S):

内田, 伏一

CITATION:

内田, 伏一. Twisted Linear Actions について(多様体の幾何学). 数理解析研究所講究録 1990, 720: 29-34

ISSUE DATE:

1990-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101821>

RIGHT:

Twisted Linear Actions について

山形大学 内田 伏一 (Fuichi Uchida)

§ 0 序

文献 [1] において、“Twisted Linear Action” と命名した non-compact Lie 群の球面への real analytic action について、新しく得られた結果を報告したい。

[1], [2] においては、半単純 Lie 群 $SL(n, \mathbb{R})$ に関する研究であったが、ここで述べるのは、べき零 Lie 群に関する結果である。本報告の内容の大半は [3] に詳述してある。

文献 [3] は、服部 晶夫 先生の御還暦を祝って、同先生に捧げるものである。

§ 1 Twisted Linear Action として定まる円周上の 1 径数変換群

$GL(2, R)$ の部分群 G を、次のように定める：

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in R \right\}$$

この群 G は加法群 R と同型である。以後、 G と R を同一視する。この § では、円周上の twisted linear G -actions について考察しよう。

(u, v) -平面における線形常微分方程式

$$\dot{u} = u + a v, \quad \dot{v} = v$$

の、 (u, v) を通る解曲線は次式で与えられる：

$$e^{\theta} \begin{pmatrix} 1 & a \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\theta \in R)$$

$|a| < 2$ のとき、この解曲線達は原点を中心とするすべての同心円と transversal に交わる。このような a に対して、

$$\xi^a : G \times S^1 \rightarrow S^1$$

を、次式で定義する：

$$\xi^a \left(x, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = e^{\theta} \begin{pmatrix} 1 & x + a \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ここに、 θ は右辺のノルム $= 1$ となるように一意に定める。

この ε^a が S^1 上の twisted linear G -action である。

以後、twisted linear G -action ε^a を持った S^1 を、単
に $S^1(a)$ で表そう。

G -多様体としての $S^1(a)$ は、上半円と下半円を開軌
道とし、残りの 2 点を不動点とする。この事実を使って、2
点 $(0, 1), (0, -1)$ を自分自身に写して、 G -actions と可換にな
る写像 $f_a : S^1(a) \rightarrow S^1(0)$ が一意に定まる。

作り方から、 f_a は同相写像になっているが、更に計算に
よって、 f_a は C^1 級の微分同相写像であることが確かめら
れる。

更に、 $a \neq b$ のとき、 $f_b^{-1} f_a$ は不動点において C^2 級
でないことが、計算によって分かる。以上の考察の下に、次
の定理を示すことができる：

定理 実数 a, b ($|a| < 2, |b| < 2$) について、

- ① $S^1(a)$ から $S^1(b)$ への、 G 同変な C^1 級の微
分同相写像が存在する。
- ② もし $a \neq b$ ならば、 $S^1(a)$ から $S^1(b)$ への G
同変な C^2 級の微分同相写像は存在しない。

証明は [3] を参照してほしい。

実数 a ($a \neq 0, |a| < 2$) に対して、写像

$$g_a : S^1(a) \rightarrow S^1(1)$$

を、次式で定義する：

$$g_a \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{\theta} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

この g_a は C^ω 級の微分同相写像であり、更に次の図式を可換にすることが分かる：

$$\begin{array}{ccc} \mu_a \times g_a & & \\ G \times S^1(a) & \xrightarrow{\quad} & G \times S^1(1) \\ \downarrow \xi_a & & \downarrow \xi_1 \\ & g_a & \\ S^1(a) & \xrightarrow{\quad} & S^1(1) \end{array}$$

ここに、 $\mu_a : G \rightarrow G$ は $\mu_a(x) = a^{-1}x$ で与えられる同型対応である。

この結果、 g_a は $S^1(a)$ から $S^1(1)$ への弱 G 同変な C^ω 級の微分同相写像であることが分かる。

更に、計算によって、 $S^1(0)$ と $S^1(1)$ の間には弱 G 同変な C^2 級の微分同相写像は存在しないことが分かる。

§ 2 補足

一般に、Lie群 G が 2 つの多様体 X, Y に作用 ξ^X, ξ^Y によって、働いているものとし、微分同相写像 $f: X \rightarrow Y$ と同型写像 $\alpha: G \rightarrow G$ が与えられていて、次の図式が可換であるものとしよう：

$$\begin{array}{ccc}
 G \times X & \xrightarrow{\quad} & G \times Y \\
 \downarrow \xi^X & \alpha \times f & \downarrow \xi^Y \\
 X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y
 \end{array}$$

もし、 α が $\alpha(g) = h^{-1}gh$ ($h \in G$) によって定義される内部自己同型写像ならば、 $f^h = \xi^Y(h, -) \cdot f$ によって、新しい微分同相写像 $f^h: X \rightarrow Y$ を定義すると次の図式が可換になる：

$$\begin{array}{ccc}
 G \times X & \xrightarrow{\quad} & G \times Y \\
 \downarrow \xi^X & 1 \times f^h & \downarrow \xi^Y \\
 X & \xrightarrow{\quad f^h \quad} & Y
 \end{array}$$

即ち、 f^h は G 同変な微分同相写像である。

この考察によって、 G 同変な微分同相による分類と、弱 G 同変な微分同相による分類の違いは、 G の外部自己同型群 $\text{Out } G = \text{Aut } G / \text{Inn } G$ の大きさに現れることが分かる。

例えば、

$$\text{Out } \text{SL}(n, R) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (n : \text{odd} \geq 3) \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & (n : \text{even} \geq 4) \end{cases}$$

であり (cf. 村上信吾 : J. Math. Soc. Japan 4 (1952))、従って、 $G = \text{SL}(n, R)$ の場合には、 G 同変な微分同相による分類と、弱 G 同変な微分同相による分類とは、あまり変わらないことが分かる。

[1] Tohoku Math. J. 39 (1987)

[2] Osaka J. Math. 25 (1988)

[3] Tohoku Math. J. 41 (1989)